Домашнее задание по теоретической механике №2

“Общие теоремы динамики”

Вариант №10

Студента МГТУ им. Н. Э. Баумана
группы М9-31
Кольцова Андрея

В механизме клин 1 массой M с углом движется под действием силы $\overline{F}$ по гладкой плоскости. При этом он перемещает толкатель 2 массой m, который прижимается к клину 1 пружиной с коэффициентом жёсткости с.

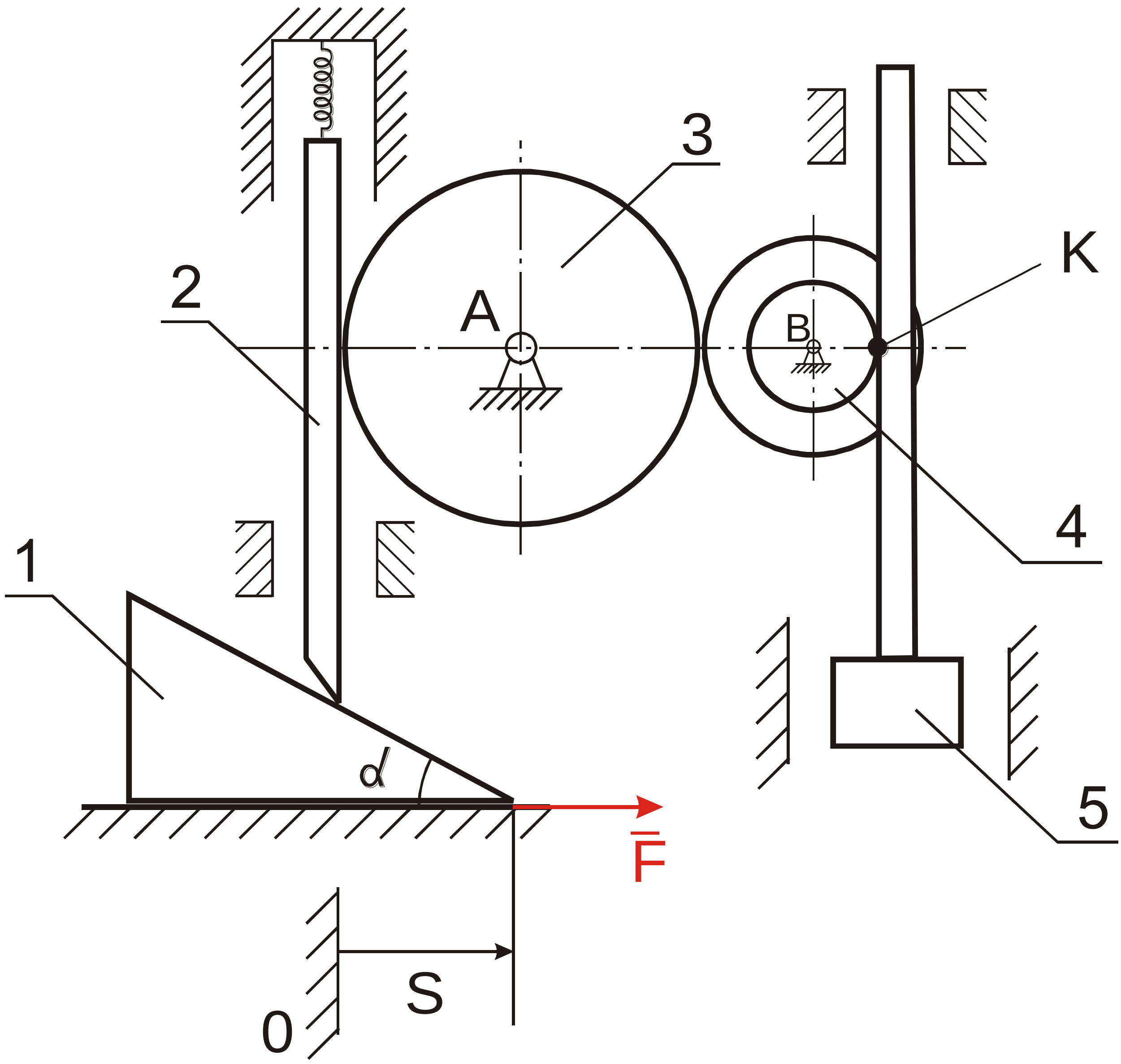
На толкателе прикрепрлена зубчатая рейка, находящаяся в зацеплении с шестернёй 3 радиуса r_3, момент инерции которой равен ✋$_3$. В зацеплении с шестернёй 3 находится шес-терня 4 с двумя зубчатыми венцами, радиусы которых равны R_4 и r_4, момент инерции шес-терни 4 равен ✋$_4$. Шестерня 4 приводит в движение затвор водослива 5 массой m_1.

Трением в сочленениях и опорах принебречь. В начальный момент механизм находился в покое, толкатель занимал крайнее нижнее положение, пружина была ненапряжена.

Определить: 1) движение затвора 5
2) касательную составляющую реакции в точке К
3) Давление клина на плоскость
4) Силу реакции в точке касания толкателя и клина

В расчетах принять: α = 300; M=2m; R_4/r_4 = 2;
r_4 = 0,3; r_3 = 0,7
m_1 = 3m; m = 100 кг;
m_3 = 2m;
c = 2600 Нм
✋$_3$ = 50 кгм^2; ✋$_4$ = 40 кгм^2
$F = 10\sqrt{3}\,mg$

В пунктах 2,3,4 принять t = 0.



1
2
3
4
5
A
B
K
α
F
S
0

Данная система имеет одну степень свободы.

Клин 1 совершает поступательное движение

Скорость клина 1 $V_1 = \dot{S}$

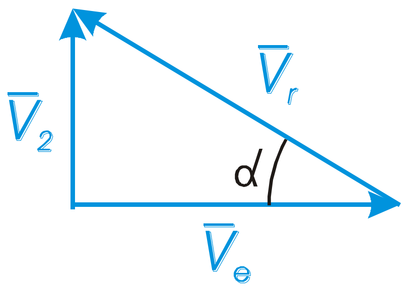
Толкатель 2 -поступательное движение. Точка A2 - точка принадлежащая толкателю движется с абсолютной скоростью

$$\bar{V}_2 = \bar{V}_r + \bar{V}_e$$

$\bar{V}_2$ - по вертикали

$\bar{V}_r$ - относительная скорость по наклонной плоскости клина

$\bar{V}_e$ - переносная скорость клина



$$V_2 = V_e * tg\alpha = \frac{\dot{S}}{\sqrt{3}}$$

Шестерня 3 совершает вращательное движение с угловой скоростью

$$\omega_3 = \frac{\dot{S}}{\sqrt{3}\ r_3}$$

Шестерня 4 совершает вращательное движение с угловой скоростью

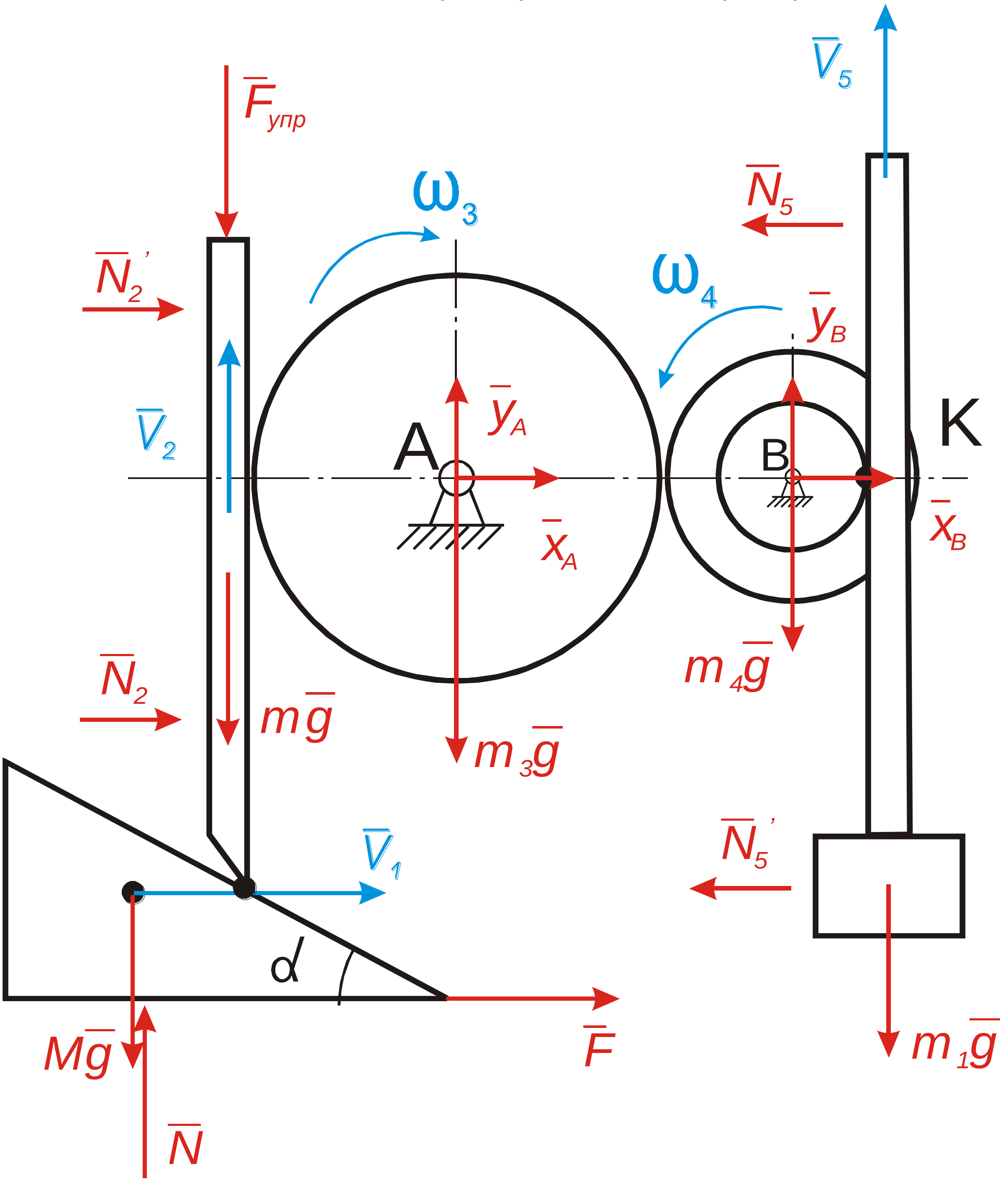
$$\omega_4 = \frac{\dot{S}}{\sqrt{3}\ r_4}$$

Водослив 5 совершает поступательное движение со скоростью

$$V_5 = \omega_4 r_4 = \frac{\dot{S}\ r_4}{\sqrt{3}\ R_4}$$

Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальном виде

$$dT = \sum dA(\overline{F}_k^{(e)}) + \sum dA(\overline{F}_k^{(i)})$$



$$T = T_1+T_2+T_3+T_4+T_5$$

$$T_1 = \frac{1}{2}MV_1^2 = \frac{1}{2}M\dot{S}$$ - кинетическая энергия клина 1

$$T_2 = \frac{1}{2}mV_2^2 = \frac{1}{2}m\cdot\frac{\dot{S}^2}{3}$$ - кинетическая энергия толкат. 2

$$T_3 = \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{I_3}{3r_3^2}\dot{S}^2$$ - кинематическая энергия шестерни 3

$$T_4 = \frac{1}{2}I_4\omega_4^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{I_4}{3R_4^2}\dot{S}^2$$ - кинематическая энергия шестерни 4

$$T_5 = \frac{1}{2}m_1V_5^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_4}{3}\cdot\left(\frac{r_4}{R_4}\right)^2\dot{S}^2$$ - кинематическая энергия водослива 5

$$T = \frac{1}{2}M\dot{S} + \frac{1}{2}m\frac{\dot{S}^2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{I_3}{3r_3^2}\dot{S}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{I_4}{3R_4^2}\dot{S}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{m_4}{3}\cdot\left(\frac{r_4}{R_4}\right)^2\dot{S}^2 = \frac{1}{2}\,[\,M+m_3/3 + I_3/3r_3^2+I_4/3R_4^2 +$$

$$+ (m_1/3)\,(r_4/R_4)^2]\cdot\dot{S}^2$$

$$B = M+m_3/3 + I_3/3r_3^2+I_4/3R_4^2 + (m_1/3)\,(r_4/R_4)^2 =$$

$$= 200 + 100/3 + 50/1.47 + 40/1.08 + 300\;0.25/3 = 329{,}384 \text{ кг}$$

Диференциал кинематической энергии

$$dT = \frac{1}{2}B\cdot 2\dot{S}d\dot{S} = B\,\frac{dS}{dt}\cdot d\dot{S} = B\ddot{S}dS \quad \text{т.е. } dT = B\ddot{S}dS$$

Элементарная работа внешних сил

$$\sum dA(\overline{F}_k^{(e)}) = FdS - mgdy_2 - F_{упр}dy_2 - m_1gdy_5$$

$$V_2 = dy_2/dt = dS/\sqrt{3}\,dt\ ; \qquad dy_5 = (dS/\sqrt{3})\cdot\left(\frac{r_4}{R_4}\right)$$

$F_{упр} = c\lambda$ - упругая сила пружины,

где $\lambda = y_2 = S/\sqrt{3}$ - деформация пружины

$$F_{упр} = cS/\sqrt{3}$$

Получаем:

$$\sum dA(\overline{F}_k^{(e)}) = FdS - mgdS/\sqrt{3} - (cS/\sqrt{3})\cdot(dS/\sqrt{3}) - (m_1gdS/\sqrt{3})\cdot\left(\frac{r_4}{R_4}\right)$$

Элементарная работа внутренних сил

$$\sum dA(\overline{F}_k^{(i)}) = 0$$

Получается::

$$B\ddot{S}\,dS = \left(F - \frac{mg + m_1gr_4/R_4}{\sqrt{3}} - cS/3\right)dS$$

$$\frac{r_4}{R_4} = \frac{1}{2}\ , \quad m_1 = 3m, \quad F = 10\sqrt{3}\ m,$$

$$B\ddot{S} + cS/3 = 15575{,}467$$

Разделив на B, получим:

$$\ddot{S} + kS = D,$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c/3}{B}} = 1{,}59\ 1/c^2$;

$$D = 15575{,}467/B = 47{,}287\ м/с^2$$

Решение неоднородного линейного уравнения

$$\ddot{S} + kS = D$$

Решение неоднородного линейного уравнения

$$S = S_{oo} + S_{чн}$$

Корни характеристического уравнения будут равны $\pm ik$

т.к. корни мнимые, то $S_{oo} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$

$S_{чн}$ - частное решение неоднородного уравнения

$$S_{чн} = E = const \qquad \ddot{S}_{чн} = 0$$

$0 + k^2E = D$, следовательно $E = D/k^2$

$$S = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + D/k^2$$

$$\dot{S} = k(-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt)$$

Начальные условия: $t = 0,\ S = 0,\ \dot{S} = 0$

$$0 = C_1 + 0 + D/k^2 \qquad C_1 = -D/k^2; \quad 0 = kC_2 \quad C_2 = 0$$

$$S = D/k^2 (1 - \cos kt); \quad D/k^2 = 18{,}69 \text{ м}$$

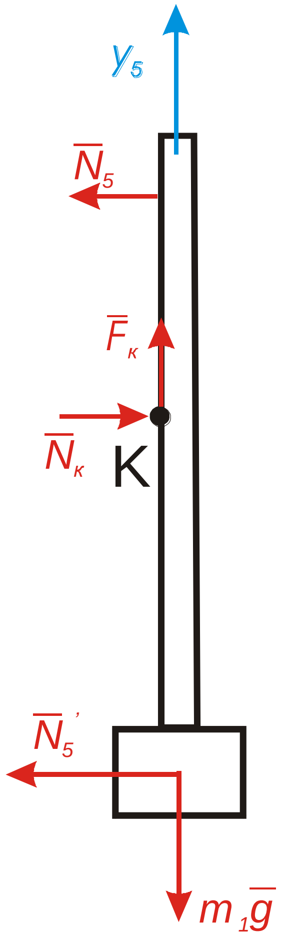
$S = 18{,}69\ (1 - \cos 1{,}59t)$ - уравнение движения клина;

$S = D\,(\cos kt)$ - ускорение клина;

$y_5 = (S/\sqrt{3}) \cdot \left(\frac{r_4}{R_4}\right) = 5{,}4(1 - \cos 1{,}59t)$ - уравнение движения водослива

$y_5 = D/\sqrt{3} \cdot \left(\frac{r_4}{R_4}\right) = 13{,}65$ м/с^2 - ускорение водослива

Определение касательной составляющей реакции в т. K



Дифференциальное уравнение поступательного движения водослива 5:

$$m_1\ddot{y}_5 = \sum F_{ky}^{e} = F_k - m_1 g$$

$$F_k = m_1 g + m_1\ddot{y}_5 = 7038 \text{ Н}$$

Дифференциальное уравнение поступательного движения клина 1

$$M\ddot{S} = \sum F_{ks}^{e} = F - N_2 \sin\alpha$$

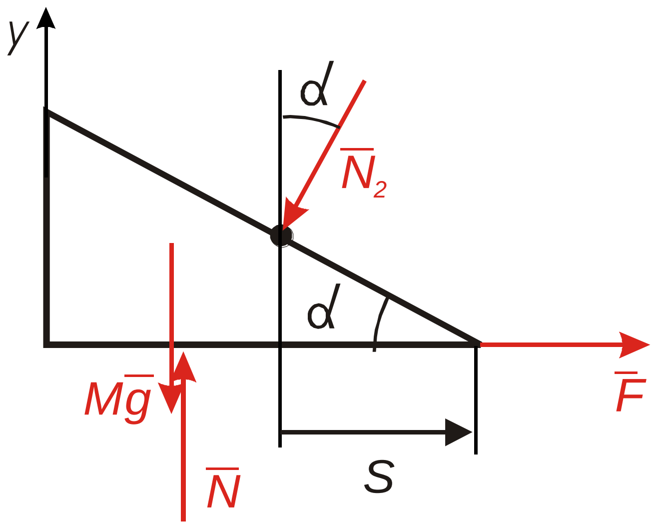
$$N_2 = (F - M\ddot{S})/\sin\alpha = 15068{,}04 \text{ Н -}$$

сила реакции в точке касания толкателя и клина

$$M\ddot{y} = \quad F_{ky}^{e} = N - Mg - N_2\cos\alpha = 0$$

$$N = Mg + N_2\cos\alpha = 15011{,}3 \text{ Н -}$$

нормальная реакция опорной плоскости, равная давлению клина на плоскость

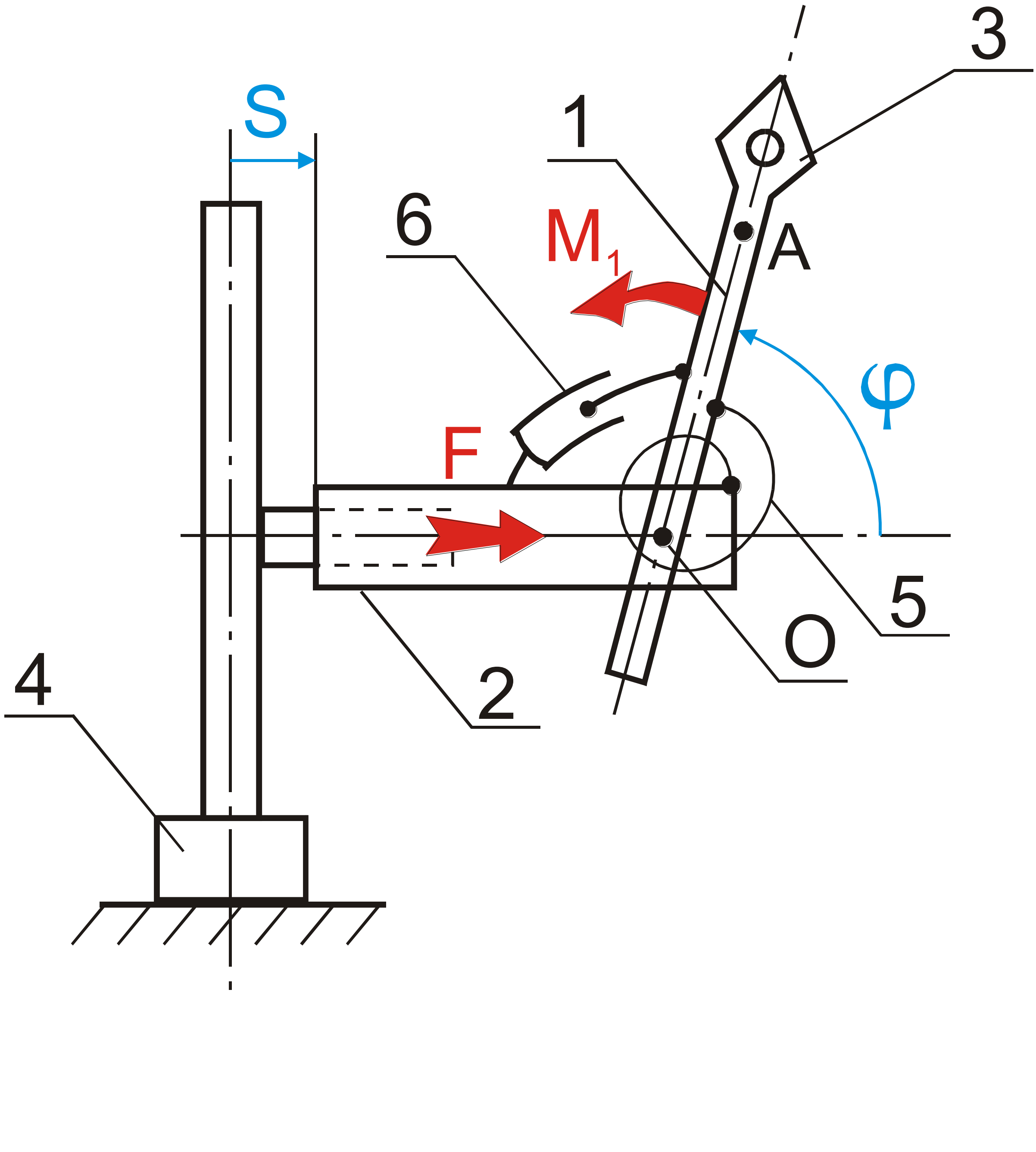


Домашнее задание по теоретической механике №3

“Уравнения Лагранжа II рода”

Вариант №10

Студента МГТУ им. Н. Э. Баумана
группы М9-31
Кольцова Андрея



S
3
1
6
M1
A
φ
F
5
O
2
4

Штанга 2 механического манипулятора, масса которой m_2, движется в горизонтальных направляющих, установленных на неподвижной стойке 4. К штанге в точке O шарнирно прикреплён рычаг 1 со схватом 3. Масса рычага со схватом m_1, его центром масс является точка A (OA=ℓ). Момент инерции рычага со схватом относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, равен I. К рычагу 1 и штанге 2 присоединены концы спиральной пружины 5 и демпфер 6. Коэффициент жесткости пружины *c.* Приводы манипулятора создают пару сил с постоянным моментом M_1, приложенную к рычагу 1, и постоянную силу $\overline{F}$ приоженную к штанге 2.

При решении задачи трением в направляющих и в шарнире O, а также массами пружины 5 и демпфера 6 пренебречь. Полагать что при $\varphi = 0$ пруина не деформирована и что момент силы трения относительно точки O, приложенной к поршню демпфера, пропорционален угловой скорости рычага 1 ($M_c = -\mu\omega_1$, где $\mu = \text{const} > 0$).

Составить дифференциальные уравнения движения системы.

Решение.

1) Число степеней свободы данной системы n = 2.
2) Выберем обобщённые координаты $q_1 = S$

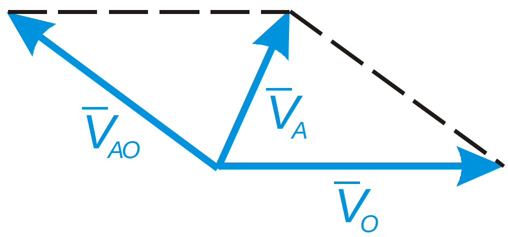
$q_2 = \varphi$

3) Составим уравнение кинетической энергии системы:

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_A^2 + \frac{1}{2} I_{Az}\omega_1^2, \quad \text{где } I_{Az} = I_{Oz} - m_1\ell^2$$

$$\overline{V}_A = \underset{\dot{S}}{\overline{V}_O} + \underset{\perp AO}{\overline{V}_{AO}}, \quad \text{где } V_{AO} = OA\,\dot{\varphi}$$



$$V_{Ax} = \dot{S} - \dot{\varphi}\ell\sin\varphi \qquad V_{Ay} = \dot{\varphi}\ell\cos\varphi$$

$$V_A^2 = \dot{S}^2 - 2\dot{S}\dot{\varphi}\ell\sin\varphi + \ell^2\dot{\varphi}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

$$V_2^2 = \dot{S} \qquad \omega_1^2 = \dot{\varphi}^2$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{S}^2 - m_1\ell\dot{S}\dot{\varphi}\sin\varphi + \frac{1}{2} I_{Oz}\dot{\varphi}$$

4) Дифференциалы от кинетической энергии системы:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot S} = (m_1 + m_2)\dot S - m_1\ell\dot\varphi\sin\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = - m_1\ell\dot S\sin\varphi + I_{Oz}\dot\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot S} = (m_1 + m_2)\ddot S - m_1\ell\ddot\varphi\sin\varphi - m_1\ell\dot\varphi^2\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = - m_1\ell\ddot S\sin\varphi - m_1\ell\dot S\dot\varphi\cos\varphi + I_{Oz}\ddot\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial S} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - m_1\ell\dot S\dot\varphi\cos\varphi$$

5) Обобщённая сила

1) $\delta S \neq 0$ $\quad\quad$ $\delta\varphi = 0$

$$Q_1 = \frac{\sum(\delta A_k)^s}{\delta S} = \frac{F\delta S}{\delta S} = F$$

2) $\delta S = 0$ $\quad\quad$ $\delta\varphi \neq 0$

$$Q_2 = \frac{\sum(\delta A_k)^\varphi}{\delta\varphi} = \frac{M_1\delta\varphi - \mu\dot\varphi\delta\varphi - m_1 g\ell\cos\varphi\delta\varphi - c\varphi\delta\varphi}{\delta\varphi}$$

$$Q_2 = M_1 - m_1 g\ell\cos\varphi - c\varphi - \mu\dot\varphi$$

6) Дифференциальные уравнения

$$(m_1 + m_2)\ddot S - m_1\ell\ddot\varphi\sin\varphi - m_1\ell\dot\varphi^2\cos\varphi = F$$

$$- m_1\ell\ddot S\sin\varphi + I_{Oz}\ddot\varphi = M_1 - m_1 g\ell\cos\varphi - c\varphi - \mu\dot\varphi$$